UNIDAD N°4
Funciones
Función Cuadrática

Asignatura

Matemática PI

Universidad Provincial del Sudoeste

Autor

Dr. Ing. Carlos Berger

DOCUMENTO TEÓRICO

Unidad N°4. Funciones: Función Cuadrática

Asignatura: Matemática PI

INDICE DE CONTENIDOS

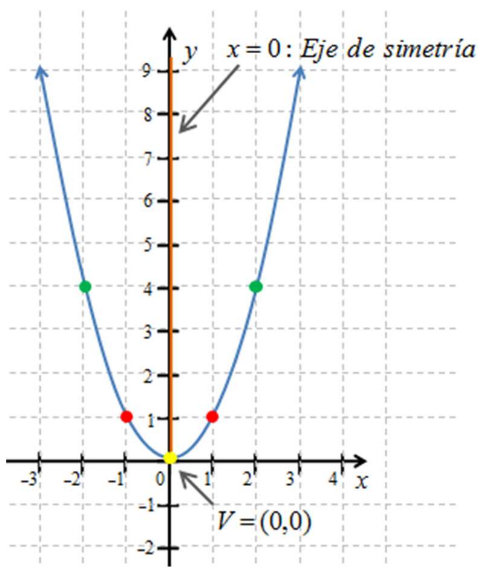
1. FUNCIÓN CUADRÁTICA

1.1. Forma polinómica

Sean $a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Se llama función cuadrática a toda función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para $x \in \mathbb{R}$ $\ f(x) = ax^2 + bx + c$

Utilizando la expresión anterior se dice que la función cuadrática está dada en forma ***polinómica***. Los valores $a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ se denominan ***coeficientes***. El gráfico de la función cuadrática es una ***parábola.***

FIGURA 1. Función cuadrática (parábola).



El gráfico tiene las siguientes características:

- ✓ La imagen es el intervalo $[0,+\infty)$
- ✓ El ***eje de simetría*** es la recta $x = 0$
- ✓ El ***vértice*** es el punto $V = (0,0)$

1.2. Forma canónica

Para graficar $f(x) = ax^2 + bx + c$ conviene usar la siguiente expresión:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

¿Cómo se obtienen *h* y *k* ?

$$f(x)=a(x-h)^2+k=a(x^2-2xh+h^2)+k=ax^2-2ahx+ah^2+k$$

Entonces:

$$h=-\frac{b}{2a} \qquad k=c-\frac{b^2}{4a}$$

En este caso se dice que la función está expresada en forma ***canónica***, y el vértice de la parábola se ubica en el punto de coordenadas (*h,k*).

Ejem

Ejemplo* 1*: Hallar el vértice y el eje de simetría de la función $f(x)=2x^2-4x+5$.

Los coeficientes de la función son: $a=2,\ b=-4,\ c=5.$
Entonces:

$$h=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(2)}=1 \qquad k=5-\frac{(-4)^2}{4(2)}=5-\frac{16}{8}=3$$

Las coordenadas del vértice son $(1,3)$, el eje de simetría es la recta $x=1$ y la función expresada en forma canónica es:

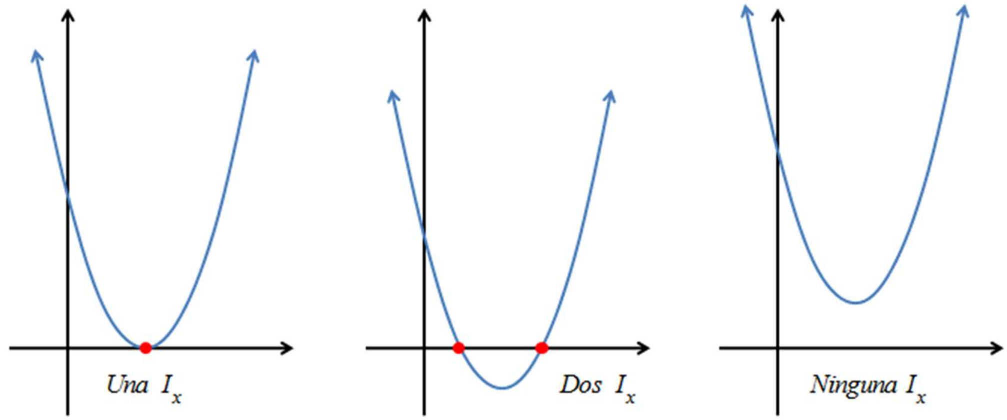
$$f(x)=2(x-1)^2+3$$

1.3. Intersecciones con los ejes coordenados.

Como el dominio de la función cuadrática abarca a todos los números reales, siempre existe un punto de intersección con el eje y. Si usamos la forma polinómica, la intersección se ubica en el punto (0,*c*). Si usamos la forma canónica, debemos calcular $f(0)$.

Con el eje *x* puede haber un punto de intersección, dos o ninguno. Para hallar, si existen, estas intersecciones se debe resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$. En la figura 2 podemos observar estos tres casos posibles. El primero de ellos se da cuando el vértice se ubica sobre el eje x, es decir, la parábola sólo tiene un corrimiento en sentido horizontal. El segundo caso se obtiene a partir de un desplazamiento vertical hacia abajo, de modo que aparecen dos puntos de intersección con el eje x. Finalmente, el tercer caso es generado con un desplazamiento vertical hacia arriba, con lo cual el gráfico se aleja del eje x y no existen intersecciones. Si el coeficiente principal (el valor de a, que acompaña al término en la potencia cuadrática) es negativo, entonces el gráfico también incluye una reflexión con respecto al eje horizontal, con lo cual se generan otras tres posibilidades similares a las mostradas en la figura.

FIGURA 2. Intersecciones con los ejes de la función cuadrática.



1.4. Ecuaciones de segundo grado

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se llama ***ecuación de segundo grado***. Un valor *r* es una ***raíz*** de la ecuación si satisface $ar^2 + br + c = 0$.

Estas raíces se calculan mediante la fórmula de Baskara: $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

El término $b^2 - 4ac$ se llama ***discriminante***, y de acuerdo a su valor se distinguen los siguientes casos:

- ✓ Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.
- ✓ Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tiene una única raíz real.
- ✓ Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene raíces reales.

1.5. Forma factorizada

Si se conocen las raíces de la ecuación de segundo grado, la función cuadrática puede expresarse en la forma ***factorizada***:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

donde

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las coordenadas del vértice de la parábola son: $h = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $\qquad k = f(h)$

Ejemplo 2: Graficar la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y obtener la imagen de *f*.

La ecuación de segundo grado es $x^2 - 2x - 3 = 0$, por lo tanto las constantes son: $a = 1,\ b = -2,\ c = -3$. Aplicando la fórmula de Baskara se obtienen las raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$$

El vértice se ubica en las coordenadas

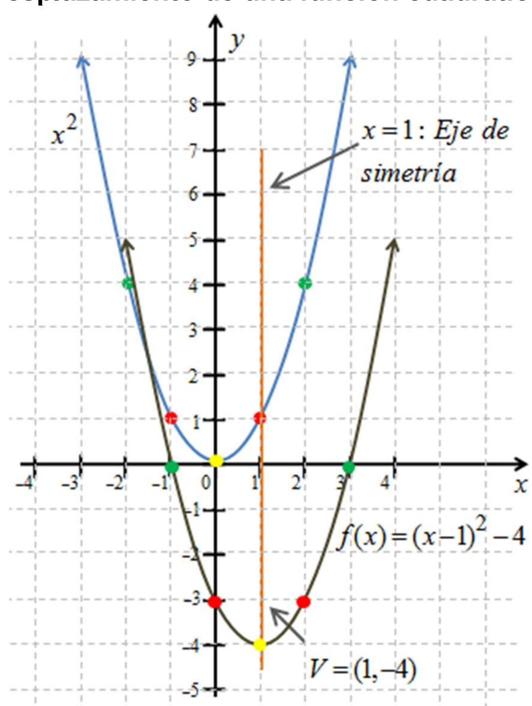
$$h = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \qquad k = f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4 \qquad \Rightarrow \quad V = (1, -4)$$

Por lo tanto la forma canónica es

$$f(x) = (x-1)^2 - 4$$

El gráfico de *f* se obtiene a partir del gráfico de x^2, con desplazamientos de 1 unidad a derecha y 4 unidades hacia abajo.

FIGURA 3. Desplazamiento de una función cuadrática (ejemplo 2).



1.5. Signo de una función cuadrática

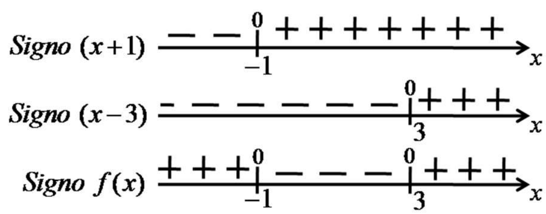
Para analizar el signo de una función cuadrática, es conveniente utilizar la forma ***factorizada***.

Ejemplo 3: Indicar los intervalos donde la función $f(x)=x^2-2x-3$ es positiva y donde es negativa.

A partir de las raíces (obtenidas en el ejemplo anterior) escribimos la forma factorizada

$f(x)=(x+1)(x-3)$

El ejercicio se resuelve aplicando la regla de signos.



Por lo tanto:

$f(x)$ es positiva en $(-\infty,-1)$ y en $(3,+\infty)$

$f(x)$ es negativa en $(-1,3)$

2. FUNCIONES POLINÓMICAS

Una función ***polinómica*** o ***polinomial*** tiene la forma:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

donde *n* es un entero no negativo, y $a_n, a_{n-1},..., a_0$ son constantes, con $a_n \neq 0$. El número *n* se llama el ***grado*** del polinomio, y a_n es el ***coeficiente principal***.

El dominio de cualquier función polinomial son todos los números reales.

Ejemplo 4: Determinar si las siguientes expresiones corresponden a funciones polinomiales. En caso afirmativo, indicar su grado y coeficiente principal.

$a) f(x)=x^3-6x^2+7: \text{ es polinomial, grado 3, y coeficiente principal } 1$

$b) g(x)=\frac{2x}{3}=\frac{2}{3}x: \text{ es polinomial, grado 1, y coeficiente principal } \frac{2}{3}$

$c) h(x)=-3x^2-4x+1: \text{ es polinomial, grado 2, y coeficiente principal } -3$

$d) f(x)=\frac{2}{x^3}: \text{ NO es polinomial (la x no puede estar en el denominador)}$

En los incisos b) y c) podemos observar el hecho de que las funciones lineal y cuadrática son casos particulares de función polinómica, de grado 1 y 2 respectivamente.

3. FUNCIONES RACIONALES

Una función que es un cociente de funciones polinomiales se llama función ***racional***. Su dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador, es decir, las raíces del denominador.

Ejemplo 5: Determinar si las funciones $f(x)=\frac{x^2-4x}{x+3}$, $g(x)=7x-2$ son racionales.

a) $f(x)=\frac{x^2-4x}{x+3}$ es una función racional, ya que el numerador y el denominador son funciones polinomiales. Esta función no está definida para $x=-3$.

b) $g(x)=7x-2$ es una función racional, ya que $7x-2=\frac{7x-2}{1}$. Así, toda función polinomial es también una función racional.

4. FUNCIÓN DEFINIDA A TRAMOS

Algunas veces, es necesaria más de una expresión para definir una función. En ese caso, la llamamos función ***definida a tramos***. Para graficar, dibujamos cada una de las expresiones, y nos quedamos con la parte que se indique de acuerdo a cada condición. Para evaluar la función en un punto, primero observamos a que intervalo pertenece, y luego realizamos el cálculo con la expresión correspondiente.

Ejemplo 6: Graficar la siguiente función y evaluar $g(-1),\ g(0)\ y\ g(3)$

$$g(x)=\begin{cases} x+3 & si\ \ x\geq 0 \\ (x+2)^2-1 & si\ \ x<0 \end{cases}$$

Primero dibujamos la función lineal que tiene ordenada al origen 3 y pendiente 1. En el mismo gráfico, dibujamos también la función cuadrática, desplazada 2 unidades a la izquierda y 1 hacia abajo. Luego, debemos elegir una parte de cada una: la función cuadrática para las x negativas, ya que la condición indicada es $x<0$, y la función lineal para las x positivas y 0, ya que la condición es $x\geq 0$. En la figura 4 se ilustra este ejemplo.

Por otro lado, para evaluar la función en los puntos dados, debemos determinar primero a qué intervalo pertenece cada valor de x:

$Para\ \ evaluar\ \ g(-1):\ como\ \ -1<0,\ usamos\ la\ expresión\ de\ la\ cuadrática:$

$$\Rightarrow g(-1)=(1+2)^2-1=8$$

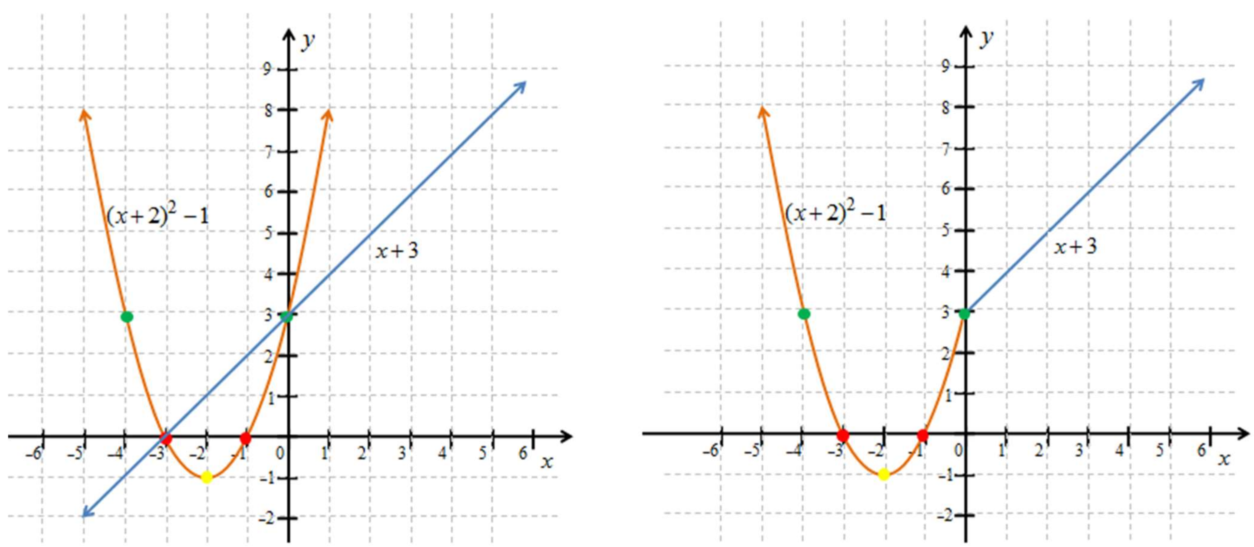
$Para\ \ evaluar\ \ g(0):\ como\ \ 0\geq 0,\ usamos\ la\ expresión\ de\ la\ lineal:$

$$\Rightarrow g(0)=0+3=3.$$

$Para\ \ evaluar\ \ g(3):\ como\ \ 3\geq 0,\ usamos\ la\ expresión\ de\ la\ lineal:$

$$\Rightarrow g(3)=3+3=6.$$

FIGURA 4. Función definida a tramos (ejemplo 6).



5. COMBINACIONES DE FUNCIONES

5.1. Combinaciones básicas

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para crear una nueva. Supongamos que *f* y *g* son las funciones dadas por:

$$f(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = 3x$$

Sumando *f(x)* y *g(x)* se obtiene:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Esta operación define una nueva función llamada ***suma*** de *f* y *g*, que se denota por $(f+g)(x)$. Su valor funcional en *x* es:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Por ejemplo, $(f+g)(2) = 2^2 + 3(2) = 10$

En general, para dos funciones cualesquiera, definimos la suma $(f+g)$, la diferencia $(f-g)$, el producto $(f \cdot g)$ y el cociente (f/g) como sigue:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo 7: Hallar las combinaciones básicas de las funciones $f(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = 3x$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3x$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot (3x) = 3x^3$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}, \quad para \quad x \neq 0$$

5.2. Composición

También podemos combinar dos funciones aplicando primero una función a un número y después la otra función al resultado. Por ejemplo, supongamos que $g(x) = 2x,\ f(x) = x^2,\ x = 3$. Entonces $g(3) = 2(3) = 6$. Así, decimos que *g* envía la entrada 3 a la salida 6:

$$3 \xrightarrow{g} 6$$

Después, hacemos que la salida 6 se convierta en la entrada para *f*:

$$f(6) = 6^2 = 36$$

De modo que *f* envía 6 al 36:

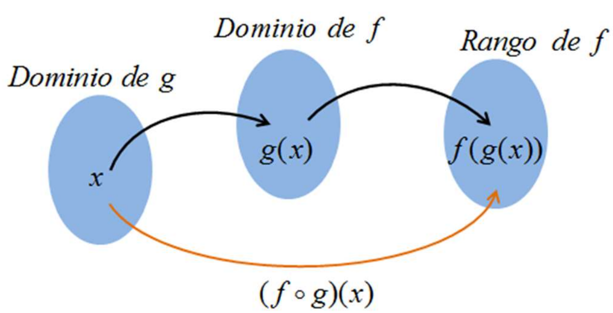
$$6 \xrightarrow{f} 36$$

Aplicando primero g y después f, con ambas operaciones enviamos el 3 al 36:

$$3 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 36$$

Esta operación de aplicar *g* y después aplicar *f* al resultado define una función llamada ***composición***, que se nota por $f \circ g$. Esta función asigna al número de entrada *x* el número de salida $f(g(x))$. Se puede pensar que $f(g(x))$ es una función de otra función.

FIGURA 5. Composición de funciones.



El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las *x* en el dominio de *g* tales que *g(x)* está en el dominio de *f*.

Para $g(x) = 2x$, $f(x) = x^2$, podemos obtener una forma sencilla para $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

Por ejemplo, $(f \circ g)(3) = 4(3)^2 = 36$, como vimos anteriormente.

Ejem

Ejemplo 8: Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$. Encontrar:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$

El dominio de *g* son todos los números reales, y el de *f* todos los números reales no negativos. El dominio de la composición son todas las *x* tales que $g(x) = x+1$ sea no negativa. Entonces el dominio son todas las $x \geq -1$.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x}+1$

El dominio de *f* son todas las $x \geq 0$ y el dominio de *g* son todos los reales. Por lo que el dominio de la composición son todas las $x \geq 0$ para las cuales $f(x) = \sqrt{x}$ es real, es decir, toda $x \geq 0$.

Por lo general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, tal como sucede en el ejemplo anterior.

A veces es necesario considerar una función como composición de dos funciones más simples.

Ejemplo 9: Expresar $h(x) = (6x+2)^4$ como una composición.

Observamos que $h(x)$ se obtiene al encontrar $6x+2$ y elevar a la cuarta el resultado.

Entonces podemos pensar que: $g(x) = 6x+2$ y $f(x) = x^4$, con lo cual:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x+2) = (6x+2)^4$$

6. BIBLIOGRAFÍA

- Arya, J. C.; Lardner, R. W. (2009). "Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía", quinta edición. México: Pearson Educación.

- Haeussler, E. F.; Paul, R. S. (2003). "Matemáticas para Administración y Economía", décima edición, México: Pearson.

- Stewart, J.; Redlin, L.; Watson, S. (2012). "Precálculo. Matemáticas para el cálculo", sexta edición. México: CengageLearning.

- Tussy, A. S.; Gustafson, R. D. (2006). "Matemáticas Básicas", tercera edición, México:CengageLearning.